

© М.Х. Шульман, 2007, 2009

(Переработано 16.12.2009)

**Коллапс обычный и необычный****Аннотация**

Описаны некоторые факторы, возникающие при непосредственном приближении материального шара конечного размера к режиму гравитационного коллапса.

**1. Введение**

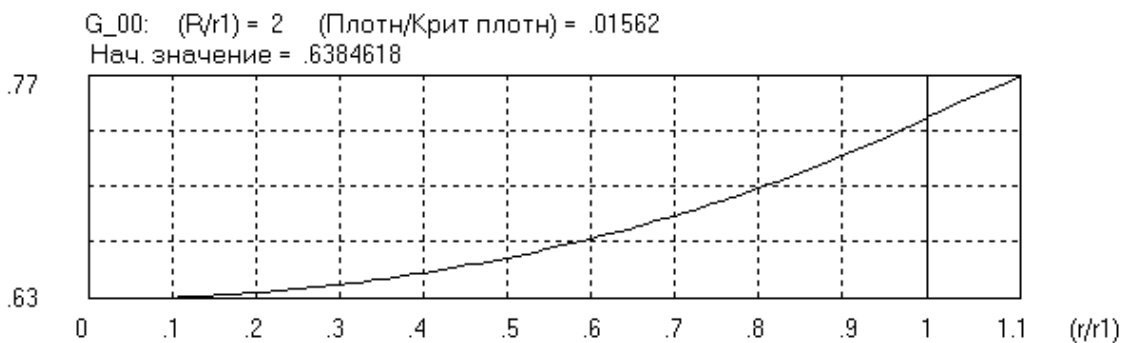
Анализ гравитационного коллапса часто основан на предположении, что реальный размер коллапсирующего объекта много меньше его гравитационного радиуса, или этот объект вообще рассматривается в качестве материальной точки. Такой подход может привести к потере некоторых важных и интересных особенностей исследуемой ситуации, поэтому учет конечного размера объекта имеет существенное значение.

В работе использован анализ на основании решения Шварцшильда для задачи об однородном материальном шаре радиуса  $r_1$ , образованным идеальной жидкостью с плотностью  $\rho$ . [Толмен, 1974]. Аналитическое описание решения приведено в Приложении к данной статье, а в основном тексте используется графическое представление результатов в виде зависимостей от текущего радиуса  $r$ . Параметризация зависимостей задается радиусом кривизны объекта  $R$  (или соответствующей величиной плотности).

**2. Поведение компоненты  $G_{00}$  метрического тензора**

Аналогом скалярного гравитационного потенциала в теории тяготения Ньютона в общей теории относительности (ОТО) является компонента метрического тензора  $G_{00}$ . Рассмотрим поведение этой безразмерной величины по мере приближения к коллапсу, представленное графически в диапазоне  $0 \leq r/r_1 \leq 1.1$ .

Пока близость к коллапсу (мера которой определяется отношением радиуса кривизны к радиусу шара или, что эквивалентно, отношением реальной плотности к критической) не превышает определенного значения, кривая монотонно нарастает (рис. 1).

Рисунок 1. Распределение  $G_{00}$  вдалике от границы коллапса

Однако при дальнейшем приближении к режиму коллапса (при  $1 \leq R/r_1 \leq 3/2\sqrt{2}$ ) монотонное поведение этой зависимости нарушается, вместо одного экстремума (минимума) появляются два (рис. 2). Начальная часть зависимости “выпучивается” вверх с максимумом в центре шара, а внутри шара появляется новый минимум, который при дальнейшем приближении к коллапсу смещается к границе шара.

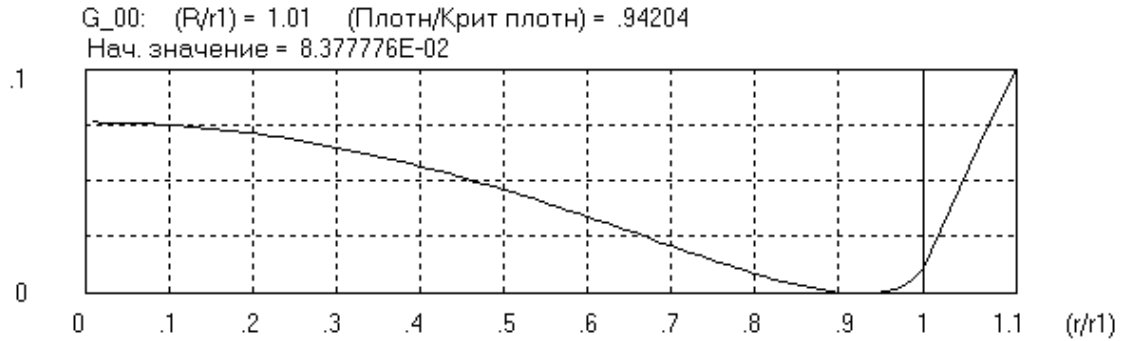


Рисунок 2. Распределение  $G_{00}$  при появлении дополнительного экстремума

Наконец, при наступлении коллапса (рис. 3) этот минимум преобразуется в излом, расположенный в точности на границе шара.

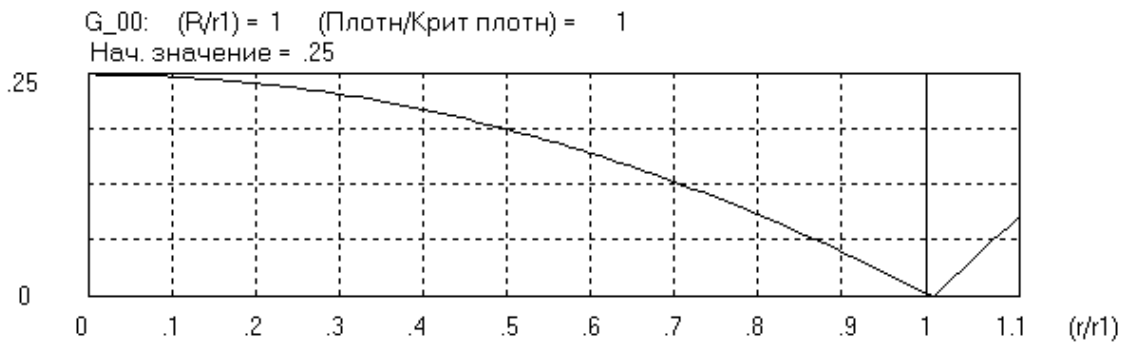


Рисунок 3. Распределение  $G_{00}$  при наступлении коллапса

### 3. Поведение давления $P$ внутри шара

Рассмотрим теперь, как ведет себя давление. Достаточно далеко от режима коллапса давление строго положительно и монотонно убывает от центра шара к его границе до нуля (рис. 4).

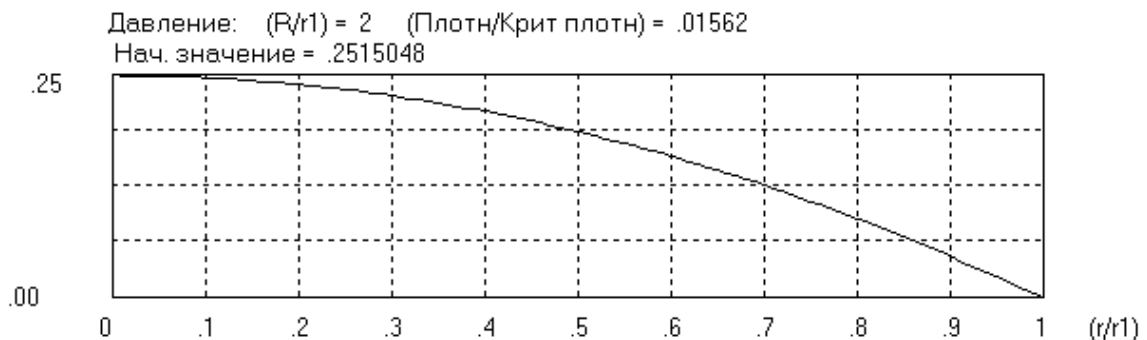


Рисунок 4. Распределение давления вдалеке от режима коллапса

По мере приближения к условию появления дополнительного экстремума  $G_{00}$  возрастает неравномерность распределения давления – оно как бы “сплющивается” в центральной области шара (рис. 5а и 5б).

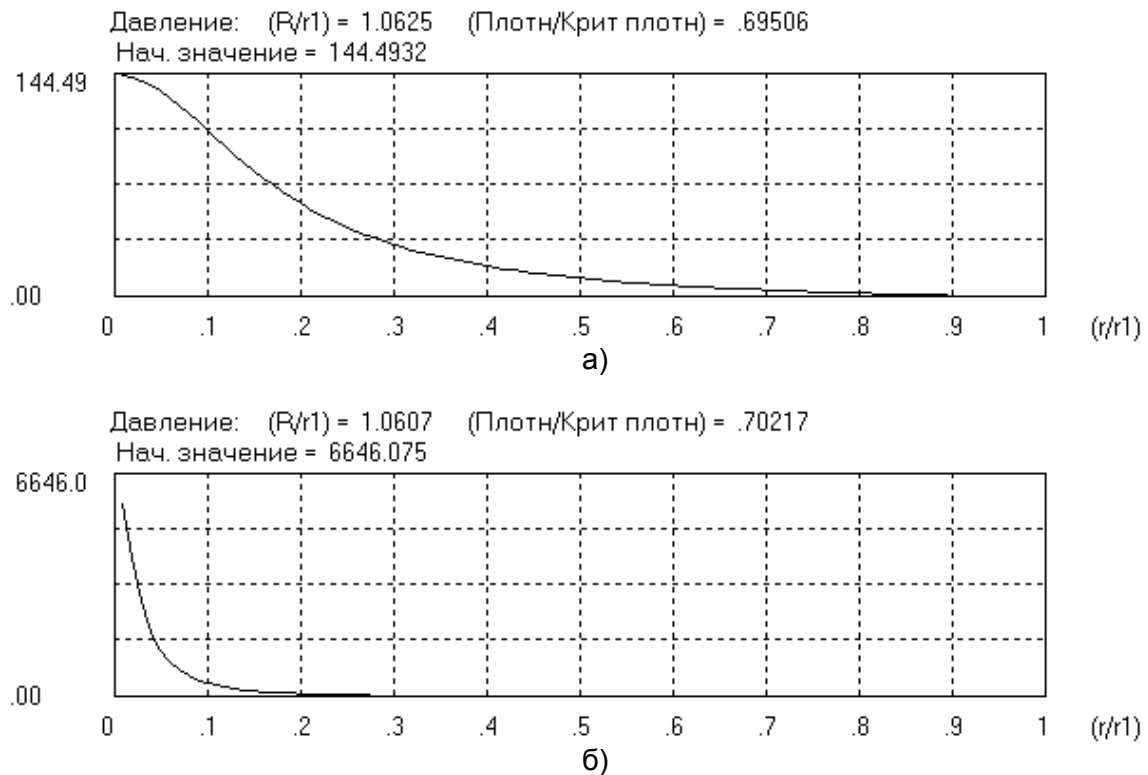


Рисунок 5. Эволюция распределение давления при приближении к режиму коллапса при наличии единственного экстремума (минимумума) у компоненты  $G_{00}$

Совсем другая картина наблюдается при дальнейшем приближении к режиму коллапса после появления второго экстремума у компоненты  $G_{00}$ , т.е. при  $3/2\sqrt{2} < (R/r_1) < 1$ . “Однополярный импульс” давления конечной амплитуды преобразуется в двуполярный разрыв функции, его левая часть (перед разрывом) становится отрицательной, а правая (после разрыва) - положительной (рис. 6а). В точке разрыва значение функции не определено.

Итак, еще в отсутствие коллапса, но вблизи граничного условия  $R/r_1 = 1$ , при котором он наступает, мы сталкиваемся с новым феноменом – *отрицательным* давлением. Отрицательные давления не являются для физики чем-то новым. В обычных условиях давление тел положительно, т.е. направлено так, как если бы тело стремилось расшириться. Это, однако, не обязательно, и тело может находиться также и в состояниях с отрицательными давлениями: в таких состояниях тело как бы “растянуто” и потому стремится сжаться. Например, отрицательным давлением может обладать перегретая жидкость; такая жидкость действует на ограничивающую ее поверхность с силой, направленной внутрь объема жидкости. В рассматриваемом случае отрицательное давление может быть обусловлено “растяжением” объема вследствие изменения метрики.

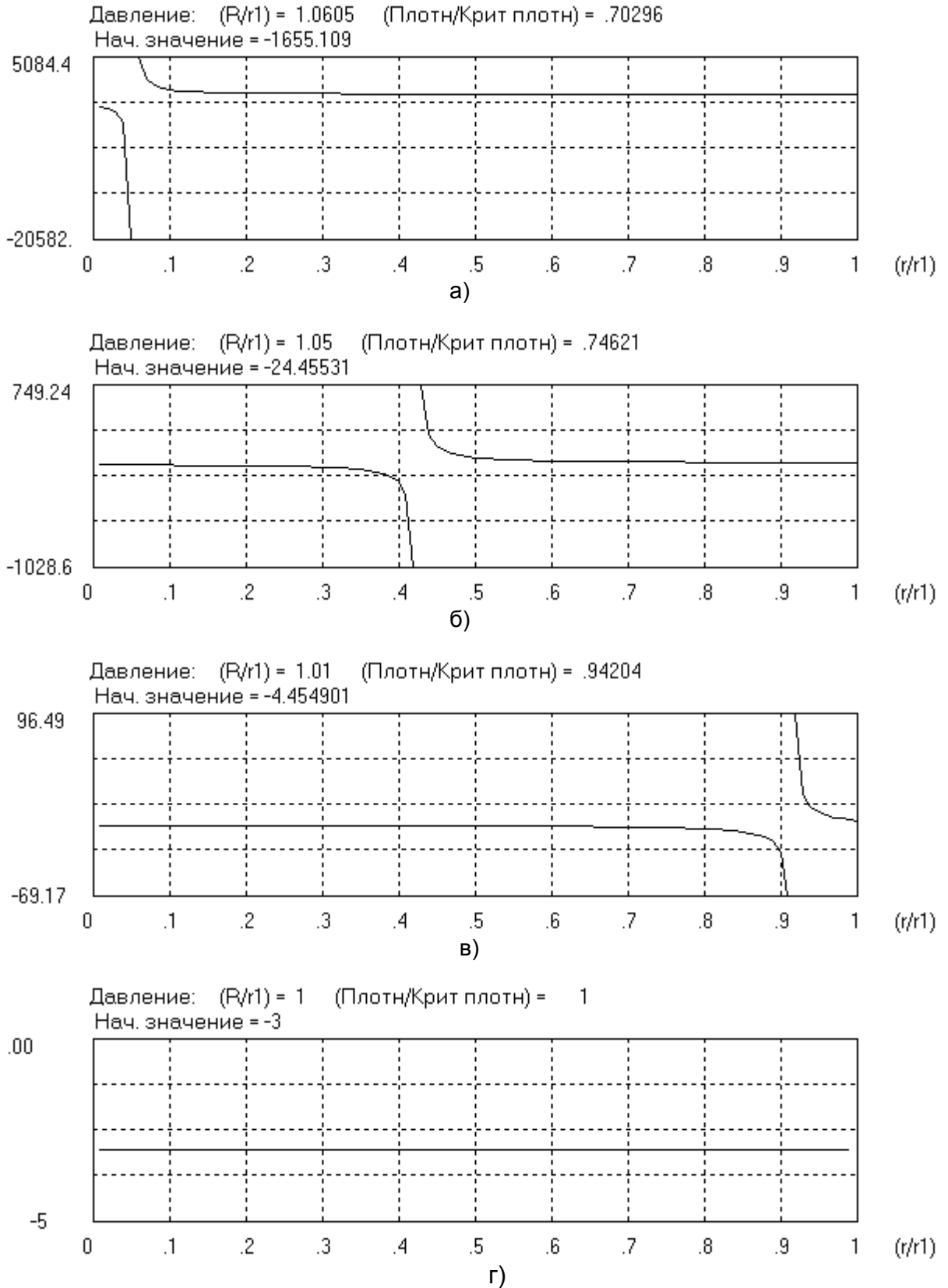


Рисунок 6. Переход от ограниченного по величине однополярного импульса давления к разрывному поведению после появления второго экстремума (минимума) у компоненты  $G_{00}$ . Смещение точки разрыва давления к границе шара при дальнейшем приближении к режиму коллапса

В этом диапазоне режимов по мере приближения к коллапсу положение точки разрыва очевидным образом смещается от центра шара к его границе. Начальное давление отрицательно и по мере приближения к коллапсу стремится к значению  $-3$ , а граничное давление всегда равно нулю. При наступлении коллапса ( $R/r_1 = 1$ ) на границе шара давление становится неопределенным ( $0/0$ ).

#### 4. Заключение

В настоящей работе мы увидели, что учет реальных размеров объекта при коллапсе позволяет обнаружить новые важные детали этого физического феномена. В частности, при достаточно малом превышении реальным размером тела его гравитационного радиуса график компоненты  $G_{00}$  метрического тензора приобретает дополнительный экстремум, переходящий в излом при точном совпадении этих двух размеров. При этом давление, оставаясь равным нулю вне шара, в преддверии коллапса испытывает аномальный разрыв, достигая бесконечных отрицательных и положительных значений. По мере приближения к режиму коллапса этот разрыв “вытесняется” за границу шара.

Следует отметить, что давление материи в этой модели играет очень важную роль, в то время как модель с точечным коллапсом роль давления вообще не учитывает. Это различие становится очень важным при анализе космологической проблемы, чему посвящена отдельная статья [Шульман, 2007] (см. также [Шульман, 2006]).

### Приложение

#### 1. Основные соотношения

В работе [Толмен, 1974] приводится решение уравнений Эйнштейна, найденное К. Шварцшильдом в метрике

$$ds^2 = G_{00} dt^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - dr^2 / (1 - r^2/R^2).$$

Подразумевается, что шар радиуса  $r_1$  из идеальной жидкости с плотностью  $\rho$  окружен “пустым” пространством и достаточно удален от других материальных тел.

Решение Шварцшильда содержит зависимости от текущего радиуса  $r$  для компоненты  $G_{00}(r)$  метрического тензора (в теории тяготения Ньютона ему соответствует скалярный гравитационный потенциал) и давления  $P(r)$ . В этом решении, помимо текущего радиуса  $r$  и радиуса шара  $r_1$ , фигурирует радиус кривизны  $R$ , определяемый из условия

$$R^2 = 3c^2 / (8\pi G\rho)$$

Поскольку гравитационный радиус  $R_G$  такого шара равен

$$R_G = 2GM/c^2 = 2 (4\pi r_1^3 G\rho) / (3c^2) = r_1^3 / R^2$$

то радиус кривизны  $R$  однозначно связан с гравитационным радиусом  $R_G$  и радиусом шара  $r_1$

$$R_G/r_1 = (r_1/R)^2$$

Кроме того, поскольку при коллапсе  $R_G = R_G = r_1$ , то выполняется соотношение

$$1 \geq (\rho/\rho_0) = R_G^2/R^2 = (r_1^6/R^6)$$

где  $\rho_0$  – плотность, отвечающая наступлению коллапса (т.е. условию  $R_G = r_1$ ).

Решение Шварцшильда в явном виде задается безразмерными соотношениями

$$G_{00} = \left( \frac{3}{2} \sqrt{1 - r_1^2/R^2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - r^2/R^2} \right)^2$$

и

$$(P/P_0) = \Phi(r, r_1, R),$$

где  $P_0 = \rho_0 c^2/3$ , а функция  $\Phi(r, r_1, R)$  задается дробью вида

$$\Phi(r, r_1, R) = \frac{3\sqrt{1 - (r/R)^2} - 3\sqrt{1 - (r_1/R)^2}}{3\sqrt{1 - (r_1/R)^2} - \sqrt{1 - (r/R)^2}}$$

## 2. Уточнение поведения зависимости $G_{00}(r, r_1, R)$

Легко видеть, что величина  $G_{00}$  всегда неотрицательна, а ее начальное значение определяется соотношением

$$G_{00}(r_1 = 0) = 9(1 - r_1^2/R^2) / 4$$

Далее, производная этой компоненты метрического тензора равна:

$$(dG_{00}/dr) = \left( \frac{3}{2} \sqrt{1 - r_1^2/R^2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - r^2/R^2} \right) r / (2R^2 \sqrt{1 - r^2/R^2})$$

При  $r = 0$  получим  $(dG_{00}/dr) = 0$ , а при  $r = r_1$  (точнее, при  $r = r_1 - 0$ ) найдем, что

$$(dG_{00}/dr) = r_1/R^2$$

Оказывается, что *не при всех* значениях отношения  $R/r_1$  в *отсутствие коллапса* функция  $G_{00}$  имеет лишь один экстремум (минимум при  $r = 0$ ). Действительно, приравнивание  $(dG_{00}/dr)$  к нулю равносильно выполнению условия

$$9(1 - r_1^2/R^2) = 1 - r^2/R^2$$

или

$$r/R = \sqrt{9r_1^2/R^2 - 8}.$$

Следовательно, дополнительный действительный экстремум возникает в зоне режимов

$$3/2\sqrt{2} > (R/r_1) > 1$$

В этом случае данный внутренний экстремум будет минимумом, а экстремум при  $r = 0$  теперь уже оказывается локальным максимумом. Указанный внутренний минимум<sup>1</sup> трансформируется в пределе (при коллапсе) в излом компоненты  $G_{00}$ , при котором производная поменяет свой знак, т.е.  $(dG_{00}/dr) = -r_1/R^2$ . Действительно, во внешней области выражения в каждом радикале станут отрицательными, так что в конечном счете производная умножится на квадрат мнимой единицы, т.е. на  $-1$ .

Начальное значение (при  $r = 0$ ) компоненты  $G_{00}$  всегда определяется выражением

$$G_{00 \text{ нач}} = \left( \frac{3}{2} \sqrt{1 - r_1^2/R^2} - \frac{1}{2} \right)^2$$

а граничное (при  $r = r_1$ )

$$G_{00 \text{ гран}} = 1 - r_1/R$$

### 3. Уточнение поведения зависимости $P(r, r_1, R)$

Чтобы проанализировать поведение функции  $\Phi(r)$ , удобно представить ее в более компактном виде

$$\Phi = 3(x - z)/(3z - x) = -3(x - z)/(x - 3z),$$

где  $x$  – первый радикал числителя, зависящий от переменной ( $r/R$ ), а  $z$  – второй радикал числителя, зависящий от параметра ( $r_1/R$ ) удаленности режима от коллапса. Знак функции  $\Phi$  зависит от соотношения между  $x$  и  $z$ :

Соотношение между $x$ и $z$	Знак $\Phi$
$0 < x < z$	$\Phi(x) < 0$
$z < x < 3z$	$\Phi(x) > 0$
$x > 3z$	$\Phi(x) > 0$

Очевидно, что в точке  $x = 3z$  имеется разрыв функции  $\Phi(r)$  – по разные стороны от этой точки функция принимает противоположные по знаку и бесконечные по величине значения. Координата ( $r/R$ ) точки разрыва определяется, очевидно, из условия

$$9(1 - r_1^2/R^2) = 1 - r^2/R^2$$

т.е. уже известным нам соотношением

$$r/R = \sqrt{9r_1^2/R^2 - 8},$$

обеспечивающим наличие дополнительного экстремума у компоненты  $G_{00}$ .

Начальное значение (при  $r = 0$ ) давления  $P$  всегда определяется выражением

$$\Phi_{\text{нач}}(r, r_1, R) = \frac{3 - 3\sqrt{1 - (r_1/R)^2}}{3\sqrt{1 - (r_1/R)^2} - 1}$$

<sup>1</sup> Интересно сравнить этот факт с утверждением (на с. 33) из монографии [Новиков и Фролов, 1986]: “Критической круговой орбите, отделяющей устойчивые движения от неустойчивых, соответствует [условие]  $r = 3R_G$ . ... Энергия частицы при этом  $E = \sqrt{8/9}$ ...”

а граничное (при  $r = r_1$ )

$$\Phi_{\text{гран}}(r, r_1, R) = \frac{3\sqrt{1-(r_1/R)^2} - 3\sqrt{1-(r_1/R)^2}}{3\sqrt{1-(r_1/R)^2} - \sqrt{1-(r_1/R)^2}} = \frac{0}{2\sqrt{1-(r_1/R)^2}} = 0$$

## Библиография

**[Новиков и Фролов, 1986]** Новиков И.Д. и Фролов В.П. *Физика черных дыр*. Москва, Наука, 1986.

**[Толмен, 1974]** Толмен Р. *Относительность, термодинамика и космология*. Москва, Наука, 1974.

**[Шульман, 2006]** Шульман М.Х. *Парадоксы, логика и физическая природа времени*. Доступно по ссылке:

[http://timeorigin21.narod.ru/rus\\_time/Origin.pdf](http://timeorigin21.narod.ru/rus_time/Origin.pdf)

**[Шульман, 2007]** Шульман М.Х. *Космология: новый подход*. Доступно по ссылке: [http://www.timeorigin21.narod.ru/rus\\_time/New\\_approach.pdf](http://www.timeorigin21.narod.ru/rus_time/New_approach.pdf)