

# Квантовые эффекты в классических системах с комплексной энергией

К.М. Бендер, Д.С. Броуди и Д.У. Хук (США, Великобритания)

Перевод М.Х.Шульмана ([shulman@dol.ru](mailto:shulman@dol.ru))

-----  
arXiv:0804.4169v1 [hep-th] 25 Apr 2008

## Quantum effects in classical systems having complex energy

Carl M Bender<sup>1</sup>, Dorje C Brody<sup>2</sup>, and Daniel W Hook<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Department of Physics, Washington University, St. Louis, MO 63130, USA  
email: [cmb@wustl.edu](mailto:cmb@wustl.edu)

<sup>2</sup>Department of Mathematics, Imperial College London, London SW7 2AZ, UK  
email: [dorje@imperial.ac.uk](mailto:dorje@imperial.ac.uk)

<sup>3</sup>Blackett Laboratory, Imperial College London, London SW7 2AZ, UK  
email: [d.hook@imperial.ac.uk](mailto:d.hook@imperial.ac.uk)

## Аннотация

С помощью подробного численного исследования показано, что имеются тесные аналогии между вероятностным поведением квантовых систем с эрмитовым гамильтонианом и детерминистическим поведением систем классической механики, рассматриваемым в комплексной области. Исследовались три модели: двукратный потенциал 4-го порядка  $V(x) = x^4 - 5x^2$ , кубический потенциал  $V(x) = \frac{1}{2}x^2 - gx^3$  и периодический потенциал  $V(x) = -\cos x$ . В случае потенциала 4-го порядка волновой пакет, который вначале локализован в одной яме, может туннелировать в другую яму. Комплексные решения классических уравнений движения демонстрируют замечательные аналогии такого поведения. Далее, классические решения представлены двумя семействами, которые подобны четным и нечетным квантово-механическим граничным состояниям. В случае кубического состояния квантовой волновой пакет, который вначале находится в квадратичной части потенциала вблизи начала, может туннелировать через барьер и порождает поток вероятности, простирающийся до бесконечности. Комплексные решения соответствующих классических уравнений движения демонстрируют очень похожее поведение. В случае периодического потенциала квантовая частица с энергией от  $-1$  до  $1$  может периодически туннелировать между смежными классически разрешенными областями и, таким образом, осуществлять локализованное случайное блуждание в виде скачков из области в область. Далее, если энергия квантовой частицы принадлежит зоне проводимости, то частица делокализуется и свободно дрейфует сквозь периодический потенциал. Классическая частица с комплексной энергией осуществляет количественно аналогичное случайное блуждание, при этом существует узкая энергетическая полоса для каждой классической частицы, где она становится делокализованной и свободно движется в потенциальном поле.

PACS: 11.30.Er, 12.38.Bx, 2.30.Mv

Принято к печати: *J. Phys. A: Math. Gen.*

## 1. Введение

Квантовая и классическая механика дают глубоко различное описание физического мира. В одномерном случае классическая механика оперирует с гамильтонианом в виде  $H(x, p) = \frac{1}{2}p^2 + V(x)$ . Движение частицы, описываемое таким гамильтонианом, может быть определено уравнениями Гамильтона

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -V'(x), \quad (1)$$

или, что эквивалентно, законом Ньютона  $-V'(x) = \ddot{x}$ . Положение  $x(t)$  частицы в момент времени  $t$  находится с помощью решения этих дифференциальных уравнений при заданных локальных начальных условиях. Энергия  $E$  частицы, то есть числовое значение гамильтониана, является константой (интегралом) движения, и может принимать непрерывный ряд значений. Движение частицы ограничено классически разрешенными областями, определенными условием  $E \geq V(x)$ . Поскольку частица не может проникнуть в классически запрещенные области, где  $E < V(x)$ , то она не может и перемещаться между несвязными классически разрешенными областями.

В квантовой механике задача ставится на основе уравнений движения с оператором Гейзенберга и зависящего от времени уравнение Шредингера с начальными условиями точно так же, как это формулируется в классической механике для уравнений Гамильтона. Однако для выполнения нелокальных граничных условий, гарантирующих конечность полной вероятности обнаружить частицу, требуется зависящее от времени уравнение Шредингера. Для стационарных состояний эти граничные условия требуют, чтобы собственные функции гамильтониана удовлетворяли нелокальной задаче с граничными значениями. Как следствие, для возрастающего потенциала, который ограничивает движение классической частицы, спектр энергий оказывается дискретным.

В то время, как в классической механике для нахождения точной траектории частицы не требуется ничего больше, чем решить дифференциальное уравнение, квантовая механика представляет собой абстрактную теорию, в которой физическое состояние системы представлено вектором в гильбертовом пространстве, а предсказания носят вероятностный характер. Вышеупомянутая нелокальность означает, что физические измерения являются "хрупкими" и сложными в осуществлении. Квантовые эффекты, такие, как дискретность энергий, туннелирование и интерференция являются следствием нелокального характера теории и не обладают интуитивной наглядностью. Например, нельзя говорить о конкретном пути, по которому следует частица в процессе туннелирования из одной классически разрешенной области в другую.

Теория с комплексно-значными величинами оказывается весьма полезной для понимания неочевидных феноменов действительно-значной теории. Например, она позволяет объяснить, почему ряды Тейлора для действительной гладкой функции  $f(x)$  могут утратить сходимость при действительном значении  $x$ . (Сходимость рядов связана с наличием сингулярностей, которые могут лежать в комплексной плоскости, а не на действительной оси.) Более того, комплексный

анализ показывает, что основная теорема алгебры о корнях полиномов есть не что иное, как прямое приложение теоремы Лиувилля.

Целью данной полемической статьи является снять покров таинственности с некоторых хорошо известных квантовых эффектов и показать, что их качественные характеристики могут быть воспроизведены очень простым образом при использовании детерминистических уравнений классической механики (закона Ньютона), если рассматривать и решать эти уравнения в комплексной плоскости. В частности, мы приписываем принципу неопределенности  $\Delta E \Delta t \gtrsim \frac{1}{2}\hbar$  смысл внутренней неопределенности энергии частицы и рассматриваем в этой статье возможность того, что эта неопределенность может иметь как действительную, так и мнимую часть. Мы устанавливаем, что классическая детерминированная частица, энергия которой имеет небольшую мнимую составляющую, может демонстрировать эффекты, которые ассоциируются исключительно с квантовой механикой. Мы не утверждаем категорически, что квантовая механика сводится к детерминистической теории со скрытыми комплексными переменными. Действительно, имеются важные квантовые явления, такие, как интерференция, которые нам пока не удалось свести к классической механике в комплексной области. Однако полученные нами результаты, основанные на использовании комплексно-значной классической механики и воспроизводящие эффекты квантовой механики, приводят к замечательному качественному и количественному подобию относительно многих хорошо известных квантовых эффектов.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 мы иллюстрируем силу комплексного анализа, объясняя с его помощью квантование энергии. Мы показываем, что в комплексной области уровни энергии перестают быть дискретными, а квантование энергии может быть объяснено топологически с учетом многолистности поверхности Римана. В разделе 3 мы описываем общие свойства траекторий классической частицы, когда ее энергия может принимать комплексные значения. В частности, классические траектории, которые являются замкнутыми и периодическими при действительных значениях энергии, перестают быть замкнутыми в случае комплексной энергии.

В разделах 4, 5 и 6 мы исследуем комплексные траектории частицы для трех видов потенциальной функции, свойства которых в квантовом случае хорошо изучены: двумерный потенциал 4-го порядка  $x^4 - 5x^2$ , кубический потенциал  $x^2 - gx^3$ , а также периодический потенциал  $-\cos x$ . В каждом из этих случаев мы устанавливаем, что соответствующая комплексная классическая система способна воспроизводить квантовый эффект туннелирования, граничные состояния различной четности, зоны проводимости и энергетические зоны. Раздел 7 содержит некоторые заключительные замечания.

## 2. Квантование на основе комплексно-значности переменных

Понятие квантованных уровней энергии является центральным в квантовой механике и радикально расходится с непрерывностью энергии в классической механике. Но если расширить квантовую теорию на комплексную область, можно прийти к существенно иному взгляду на квантование. Для иллюстрации этого рассмотрим простую двумерную квантовую систему с гамильтонианом

$$H = H_0 + \epsilon H_I, \quad (2)$$

где константа связи  $\epsilon$  является действительной. Диагональная матрица с двумя

$$H_0 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad (3)$$

уровнями энергии  $a$  и  $b$  описывает невозмущенную систему. Взаимодействие представлено эрмитовой матрицей с недиагональными элементами

$$H_I = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Уровни энергии  $H$  очевидно являются действительными и дискретными:

$$E_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ a + b \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2} \right]. \quad (5)$$

Элементарный способ понять дискретность этих энергетических уровней состоит в расширении постоянной связи  $c$  на комплексную область. Определим функцию энергии  $E(\epsilon)$  в виде

$$E(\epsilon) \equiv \frac{1}{2} \left[ a + b + \sqrt{(a-b)^2 + 4\epsilon^2 c^2} \right]. \quad (6)$$

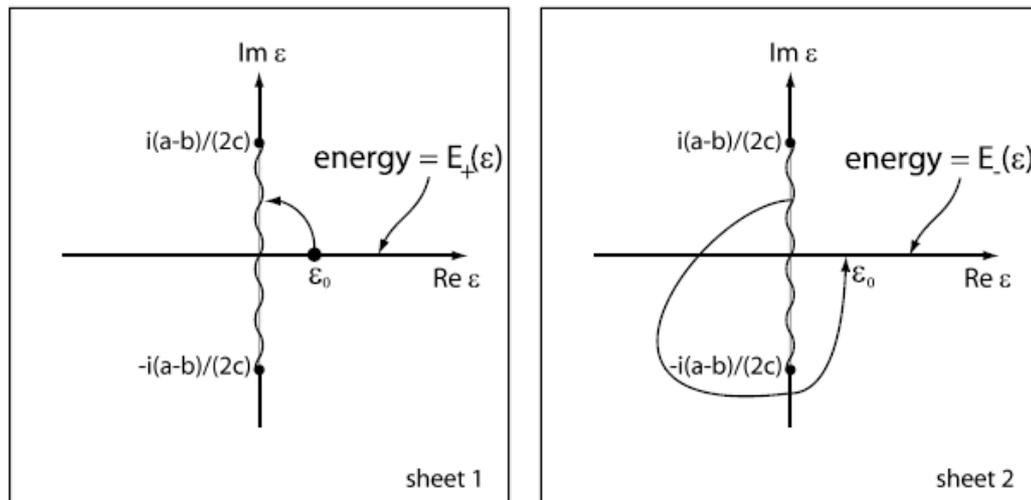


Рисунок 1. Двухлистная поверхность Римана для функции энергии  $E(\epsilon)$  в (6). На поверхности Римана эта функция является гладкой и непрерывной, а квантование уровней энергии отвечает нумерации листов поверхности. Энергия кажется дискретной и квантованной только если мы ограничиваем поверхность Римана осью действительной части  $\epsilon$ . Показан путь из точки  $\epsilon_0$  на действительной оси листа 1 в соответствующую точку на действительной оси листа 2. Вдоль этого пути собственное значение энергии  $E_+$  непрерывно переходит в другое собственное значение энергии  $E_-$ .

В качестве функции комплексного  $\epsilon$  функция  $E(\epsilon)$  является двузначной, так что она должна быть определена на двухлистной поверхности Римана. Эти листы смыкаются в сечении ветви, которое соединяет значения квадратных корней в точках  $\epsilon = \pm i(a-b)/(2c)$  (см. рис. 1). На оси действительных значений  $\epsilon$  первого листа  $E(\epsilon) = E_+$ , тогда как на оси действительных значений  $\epsilon$  второго листа  $E(\epsilon) = E_-$ .

На поверхности Римана функция энергии  $E(\epsilon)$  является гладкой и непрерывной, а не квантованной, функцией комплексного  $\epsilon$ . В самом деле, вдоль непрерывного пути, ведущего из точки  $\epsilon_0$  на оси действительных значений на первом листе, пересекает сечение ветвления и ведет в соответствующую точку  $\epsilon_0$  на оси действительных значений на втором листе, собственное значение энергии  $E_+$  непрерывно переходит в  $E_-$  (такой путь показан на рис. 1.) Таким образом, мы видим, что квантование в (5) есть следствие топологической дискретности листов, составляющих поверхность Римана. Функция энергии  $E(\epsilon)$  кажется квантованной только если мы ограничиваем ее область осями действительных значений на листах поверхности Римана.

Подведем итог. Мы расширили гамильтониан в (2) на комплексную область, выбрав комплексную постоянную связи  $\epsilon$ , получив более ясное и более глубокое понимание природы квантования. Топологическая картина квантования, описанная здесь, является совершенно общей, она применима и к более сложным системам, таким как  $H = p^2 + V(x) + \epsilon W(x)$ , обладающим бесконечным числом уровней энергии [1].

В общем случае преимущество анализа системы в комплексной плоскости состоит в том, что особые свойства (подобно дискретности собственных значений), которые проявляются только на оси действительных значений или возникают лишь тогда, когда мы ограничиваемся действительной областью, могут рассматриваться как часть более простой и более общей картины. В оставшейся части статьи мы изучим перенесенную в область комплексных величин классическую механику. Мы увидим, что классические траектории остаются замкнутыми и периодическими при строго действительной энергии, но эти особые свойства исчезают, а траектории перестают быть замкнутыми, когда мы переходим к комплексной энергии.

Незамкнутые траекториями являются более общими и, в отличие от замкнутых, их поведение богаче и тоньше, оно порождает сильное сходство с некоторыми свойствами, которые считались присущими только квантовой области.

### 3. Классическая механика в комплексной области

При данном классическом гамильтониане  $H(x, p)$  траектория  $x(t)$  частицы полностью определена уравнениями движения (1) Гамильтона вместе с начальными условиями  $x(0)$  и  $p(0)$ . Энергия  $E$  фиксирована этими начальными условиями и остается инвариантом уравнений движения Гамильтона. В элементарных учебниках по классической механике эти начальные условия считаются действительно-значными, так что энергия  $E$  тоже действительна, и траектории частицы ограничены осью действительных чисел. Однако в недавних статьях, посвященных РТ-симметрии классической механики, было показано, что наряду с действительными траекториями систем, обладающих действительной энергией, интерес представляют также и комплексные траектории [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11].

Проиллюстрируем траектории классической механики с действительной энергией на примере ангармонического осциллятора с гамильтонианом  $H = \frac{1}{2}p^2 + x^4$ . Эти классические траектории с энергией  $E = 1$  представлены на рис. 2. Имеется четыре точки поворота, расположенные при  $x = \pm 1, \pm i$  и отмеченные кружками. Так называемая “классически разрешенная” область представляет собой часть действительной оси между  $x = -1$  и  $x = 1$ , при этом классическая частица, которая вначале находилась на этом отрезке, будет двигаться

параллельно действительной оси и колебаться между действительными точками поворота. Так называемые “классически запрещенные” области представляют собой отрезки действительной оси, для которых  $|x| > 1$ , при этом частица, начальное положение которой принадлежит одной из этих областей, начнет двигаться перпендикулярно действительной оси. Тем самым частица проникнет в комплексную область, повернет по направлению к мнимой точке поворота и вернется в начальное положение. В силу теоремы Коши все замкнутые орбиты на этом рисунке имеют один и тот же период  $\sqrt{\pi/2} \Gamma(\frac{1}{4}) / \Gamma(\frac{3}{4}) = 3.70815\dots$ . Имеются две незамкнутые орбиты, которые отвечают движению вдоль мнимой оси от  $i$  до  $+i\infty$  и от  $-i$  до  $-i\infty$  в течение половины этого времени. Заметим, что две различные классические траектории никогда не пересекаются.

Принципиально важным свойством, иллюстрируемым рис. 2, является замкнутость всех классических траекторий (за исключением двух уходящих в бесконечность отрезков на мнимой оси). Это означает, что мы можем рассматривать систему как сложный атом. Поскольку классические орбиты замкнуты, мы можем проквантовать систему и вычислить разрешенные уровни энергии  $E_n$ , используя формулу квантования Бора-Зоммерфельда  $\oint dx p = (n + \frac{1}{2})\pi$  вдоль *любой* из этих замкнутых орбит, чтобы получить действительные дискретные уровни энергии квантового ангармонического осциллятора.

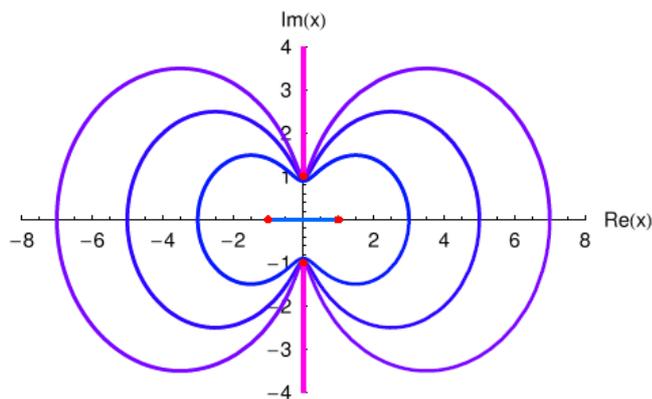


Рисунок 2. Классические траектории на комплексной  $x$  – плоскости, представляющие возможные траектории движения с энергией  $E = 1$ . Это движение отвечает ангармоническому осциллятору с гамильтонианом  $H = \frac{1}{2} p^2 + x^4$ . Имеется одна действительная траектория с колебаниями между точками поворота при  $x = \pm 1$  и бесконечное семейство вложенных комплексных траекторий, содержащих действительные точки поворота, но лежащих между мнимыми точками поворота при  $\pm i$ . (Точки поворота отмечены кружками.) Две другие траектории начинаются в мнимых точках поворота  $\pm i$  и уходят на бесконечность вдоль оси мнимых значений  $x$ . Все остальные траектории являются замкнутыми и периодическими. Все орбиты на этом рисунке имеют один и тот же период  $\sqrt{\pi/2} \Gamma(\frac{1}{4}) / \Gamma(\frac{3}{4}) = 3.70815\dots$ .

Напомним, принцип неопределенности Гейзенберга утверждает, что имеется внутренняя неопределенность в энергии  $E$ . Посмотрим, что происходит, когда вследствие этой неопределенности энергии становится комплексной. Начнем с того, что точки поворота определены значением энергии, поэтому они несколько сместятся относительно своего положения на рис. 2. Однако главный эффект состоит в том, что классические траектории, все еще оставаясь непересекающимися, больше не должны оставаться замкнутыми и периодическими. На рис. 3 показана единственная траектория для частицы с

энергией  $E = 1 + 0.1i$ . Ее начальное положение отвечает точке  $x(0) = 1$ , после чего частица движется в течение времени  $t_{\max} = 35$ .

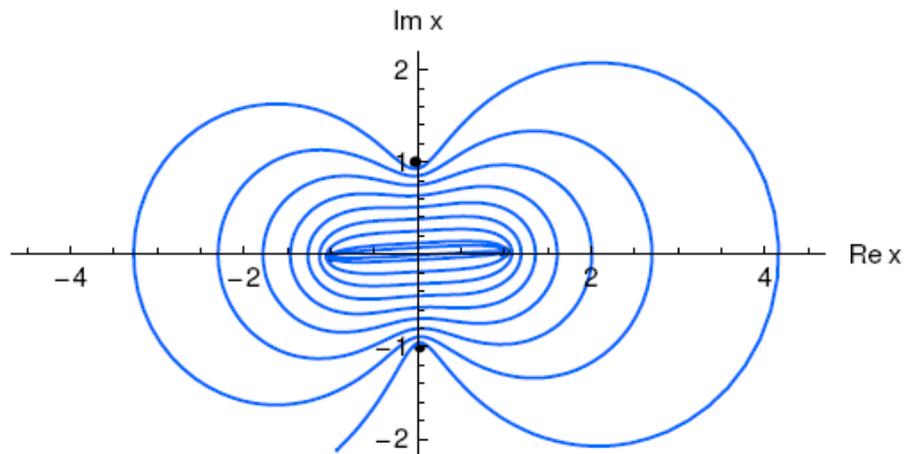


Рисунок 3. Единственная классическая траектория на комплексной  $x$  – плоскости, отвечающая ангармоническому осциллятору с гамильтонианом  $H = \frac{1}{2} p^2 + x^4$ . Эта траектория начинается при  $x = 1$  и изображает комплексную траекторию частицы с комплексной энергией  $E = 1 + 0.1i$ . Эта траектория – не периодическая и не замкнутая. Четыре точки поворота показаны кружками. Траектория нигде не пересекается сама с собой.

#### 4. Двумный потенциал

В этом разделе мы исследуем двумный потенциал  $x^4 - 5x^2$ . Квантовая частица с отрицательной энергией в таком потенциале туннелирует назад и вперед между классически разрешенными областями слева и справа от  $x = 0$ .

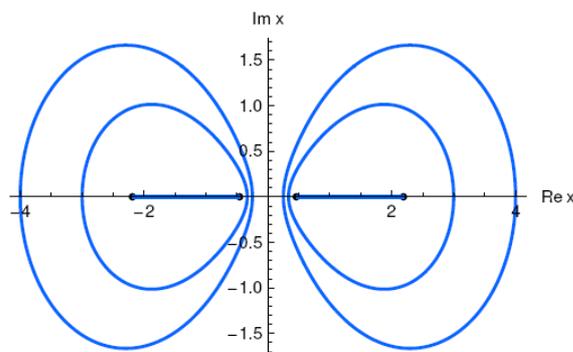


Рисунок 4. Шесть классических траекторий в комплексной  $x$  – плоскости, изображающих движение частицы с энергией  $E = -1$  в потенциале  $x^4 - 5x^2$ . Точки поворота расположены при  $x = \pm 2.19$  и  $x = \pm 0.46$ , они показаны кружками. Поскольку энергия является действительной, все траектории замкнуты. Классическая частица остается в левой или правой полуплоскости и не может пересечь мнимую ось. Таким образом, когда энергия имеет действительное значение, эффект, подобный туннелированию, отсутствует.

Посмотрим сначала, что происходит, если мы поместим в такую потенциальную яму классическую частицу с действительной энергией. Сопоставим этой частице энергию  $E = -1$  и изобразим некоторые возможные комплексные траектории на рис. 4. Точки поворота, отвечающие такому выбору энергии, лежат на действительной оси при  $x = \pm 2.19$  и  $x = \pm 0.46$ , они отмечены кружками. Заметим, что классические траектории всегда остаются в левой или

правой полуплоскости и не могут пересечь мнимую ось. Таким образом, когда энергия имеет действительное значение, эффект, подобный туннелированию, отсутствует.

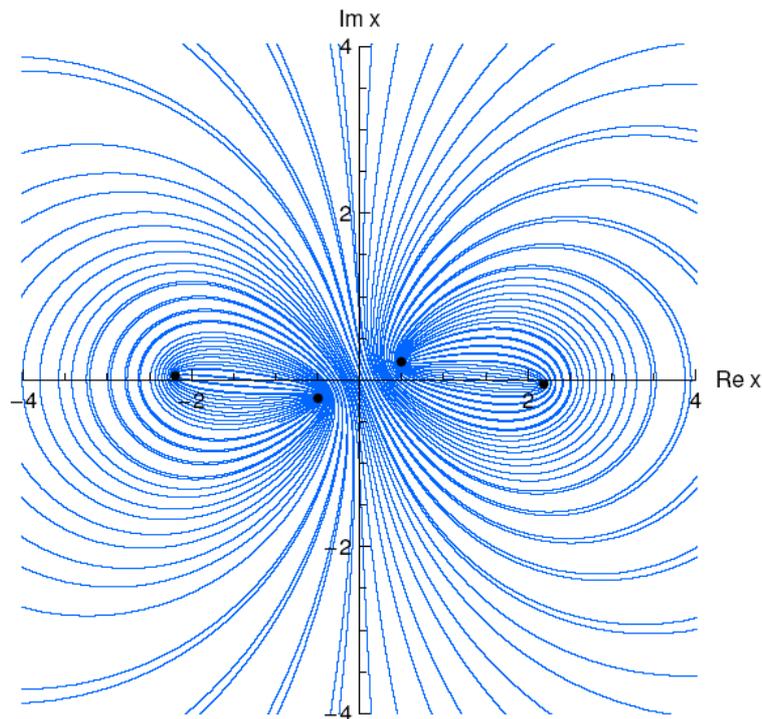


Рисунок 5. Классическая траектория частицы, движущейся в комплексной  $x$  – плоскости под действием двумного потенциала  $x^4 - 5x^2$ . Частица имеет комплексную энергию  $E = -1 - i$  и, таким образом, ее траектория не замкнута. Траектория скручивается вокруг одной пары точек поворота, а затем раскручивается. Далее частица пересекает ось мнимых значений, после чего скручивается, а затем раскручивается вокруг другой пары точек поворота. Опять происходит пересечение мнимой оси и бесконечное повторение процесса. Ни в одной точке траектория не пересекает сама себя. Движение классической частицы аналогично поведению квантовой частицы, которая периодически туннелирует взад и вперед между двумя классически разрешенными областями. Здесь, однако, частица не исчезает в классически запрещенной области во время туннелирования; скорее, она движется по хорошо определенной траектории в комплексной  $x$  – плоскости от одной ямы к другой. Табл. 1 показывает, что эта траектория может рассматриваться как имеющая нечетную симметрию.

Теперь разрешим энергии классической частицы принять комплексное значение:  $E = -1 - i$ . Нам, в частности, интересны незамкнутые классические траектории, которые возникают при такой комплексной энергии, потому что их поведение напоминает феномен квантового туннелирования. На рис. 5 показана одиночная траектория, которая начинается при  $x = 0$ . Частица движется в правую половину комплексной плоскости, с течением времени траектория скручивается вокруг правой пары точек поворота. Форма спирали подобна той, которая изображена на рис. 3. После множества витков частица пересекает ось действительных значений между двумя точками поворота и затем начинает раскручиваться. В конечном счете частица пересекает ось мнимых значений и закручивается между левой парой точек поворота. Далее процесс повторяется: в конце концов, частица пересекает ось действительных значений, раскручивается, пересекает ось мнимых значений и начинает закручиваться вокруг правой пары точек поворота.

Imaginary crossing point	Direction	Time of crossing
0.909 592 <i>i</i>	→	45.728 640
0.781 619 <i>i</i>	←	5.366 490
0.441 760 <i>i</i>	→	34.347 705
0.407 514 <i>i</i>	←	16.764 145
0.253 436 <i>i</i>	→	22.909 889
0.231 656 <i>i</i>	←	28.205 183
0.118 499 <i>i</i>	→	11.457 463
0.100 556 <i>i</i>	←	39.658 755
0 <i>i</i>	→	0
-0.017 057 <i>i</i>	←	51.116 500
-0.082 877 <i>i</i>	→	90.775 058
-0.136 772 <i>i</i>	←	62.573 579
-0.210 728 <i>i</i>	→	79.320 501
-0.276 231 <i>i</i>	←	74.024 673
-0.376 304 <i>i</i>	→	67.876 728
-0.479 881 <i>i</i>	←	85.458 656
-0.690 666 <i>i</i>	→	56.467 388
-1.121 155 <i>i</i>	←	96.812 583

Таблица 1. Точки пересечения мнимой оси (Imaginary crossing point), направление движения (Direction) и времена пересечения (Time of crossing) для классической траектории, изображенной на рис. 5. Каждый раз, когда траектория пересекает мнимую ось, мы указываем точку пересечения (первая колонка), направление движения (вторая колонка) и время пересечения (третья колонка). Если осуществить зеркальное пространственное отражение, то и эта таблица переходит в свое зеркальное отображение, так что мы классифицируем траекторию на рис. 5 как имеющую нечетную симметрию.

Этот процесс скручивания, раскручивания, пересечения мнимой оси продолжается бесконечно, при этом траектория никогда не пересекает сама себя. Во время этого процесса каждая пара точек поворота действует как странный аттрактор; пара точек поворота задает скручивание траектории классической частицы по спирали, а затем – раскручивание вдоль прилегающей траектории. Классическая частица примерно в течение половины времени движется по спирали “под влиянием” левой пары точек поворота, а в течение другой половины – “под влиянием” правой пары точек поворота. Классический процесс “туннелирования” выглядит менее абстрактно и, следовательно, более понятен, чем его квантово-механический аналог. При квантовом туннелировании частица исчезает из одной классической области и возникает – как правило, непосредственно – в другой классической области. При этом мы не можем спрашивать, каким путем следует частица во время этого процесса. Однако в случае классической частицы ясно, каким образом она движется из одной классически разрешенной области в другую; она следует по хорошо определенной траектории в комплексной  $x$  - плоскости.

Имеется даже еще одна неожиданная аналогия между квантовой и классической системами. Стационарное состояние квантовой частицы в двумерном потенциале типа  $x^4 - 5x^2$  имеет определенный тип четности, то есть собственные функции являются либо четными, либо нечетными функциями  $x$ . Классическая траектория, изображенная на рис. 5, также демонстрирует определенный тип четности, который мы можем наблюдать, если отслеживаем направление движения частицы при пересечении ею мнимой оси. В первой колонки табл. 1

указаны точки пересечения траекторией мнимой оси, во второй колонке – направление движения в этой точке (слева или справа). В третьей колонке приведено время пересечения. При изменении четности направления скорости в третьей колонке меняются на противоположные. Однако при этом положения аргументов в таблице должны также быть отражены относительно центрального аргумента, поскольку при изменении четности мы заменяем комплексное число  $x$  на  $(a - x)$  для некоторого значения  $a$ . Таким образом, эта таблица переходит в свое зеркальное отражение, т.е. мы можем утверждать, что она обладает нечетной симметрией.

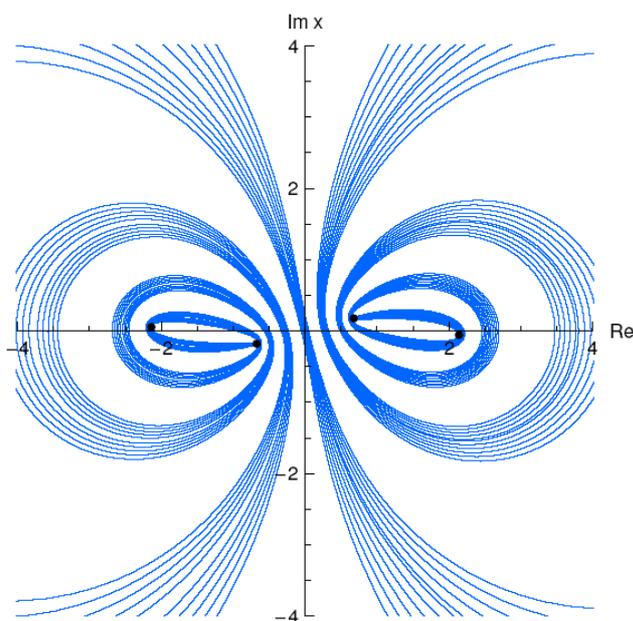


Рисунок 6. Классическая траектория на комплексной  $x$  – плоскости для частицы в двумном потенциале  $x^4 - 5x^2$ . Частица начинает свое движение в начальной точке  $x = 0$ , но с меньшей действительной частью энергии, чем на рис. 5:  $E = -2 - i$ . Данная траектория качественно отличается от представленной на рис. 5 тем, что она удерживается внутри узких “ленточек” и не заполняет всю комплексную  $x$  - плоскость. Кроме того, поскольку действительная часть энергии частицы в данном случае меньше, чем для рис. 5, траектория пересекает мнимую ось (прыгает через барьер) реже. Табл. 2, содержащая сведения о пересечениях мнимой оси, показывает, что данная траектория характеризуется четным типом симметрии.

Пусть теперь действительная часть энергии классической частицы станет немного меньше, а мнимая часть останется той же:  $E = -2 - i$ . Траектория частицы, показанная на рис. 6, начинается при  $x = 0$  и имеет как раз такую энергию. Эта траектория заметно отличается от приведенной на рис. 5, поскольку движении частицы удерживается в узких полосах, или “ленточках”. Что более важно, если мы построим таблицу пересечений для этого рисунка (см. табл. 2), мы увидим, что характер пересечений полностью отличается от приведенного во второй колонке табл. 1. В данном случае траектория может быть классифицирована как обладающая четной симметрией.

Тип четности квантовых собственных функций, отвечающих двумному потенциалу  $x^4 - 5x^2$ , чередуется при монотонном изменении энергии. Аналогично этому, мы установили, что тип четности классических траекторий также чередуется по мере монотонного изменения действительной части энергии.

Imaginary crossing point	Direction	Time of crossing
0.212 966 $i$	←	85.604 840
0.114 590 $i$	←	47.557 393
0.068 159 $i$	←	28.534 298
0.407 514 $i$	←	16.764 145
0.022 623 $i$	←	9.511 410
0 $i$	→	0
-0.045 318 $i$	→	19.022 837
-0.091 223 $i$	→	38.045 810
-0.187 424 $i$	→	57.069 065
-0.210 728 $i$	→	76.092 765
-0.239 354 $i$	→	95.117 102

Таблица 2. То же, что и в табл. 1, но с аргументами, отвечающими классической траектории, приведенной на рис. 6. Здесь меньше пересечений с мнимой осью, чем в табл. 1, поскольку меньше величина действительной части энергии. В терминах квантовой механики это означает, что частица обладает меньшей способностью к туннелированию через барьер между ямами.

## 5. Кубический потенциал

В этом разделе мы исследуем кубический гамильтониан  $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}x^2 - gx^3$ , который моделирует квантовую частицу в долгоживущем метастабильном состоянии. Эта частица вначале удерживается в классически разрешенной области, отвечающей параболической части потенциала, но в конечном счете туннелирует через барьер и затем быстро движется от него в сторону  $x = +\infty$ . Этот гамильтониан служит моделью – архетипом для радиоактивного распада.

Уровни энергии этого гамильтониана были вычислены для малых  $g$  с использованием метода ВКБ [12], приближительная формула для энергии основного состояния имеет вид

$$E(g) \sim \frac{1}{2} - \frac{11}{8}g^2 - i\frac{1}{g\sqrt{\pi}}e^{-2/(15g^2)} \quad (g \rightarrow 0^+). \quad (7)$$

Сопряженное выражение для мнимой части энергии дает приближенную меру времени жизни  $\tau$  метастабильного состояния:

$$\tau \approx g\sqrt{\pi}e^{2/(15g^2)}. \quad (8)$$

Исследуем, что происходит с классической частицей под действием этого потенциала. Выберем сначала  $g = \frac{1}{3}$  и сопоставим нашей частице действительную энергию  $E = 0.1$ . Так как энергия действительна, траектории частицы будут замкнутыми и периодическими (см. рис. 7). Периодические траектории не могут изображать физический процесс туннелирования, в котором частица, вначале удерживаемая в потенциальной яме, постепенно просачивается на сколь угодно далекое расстояние.

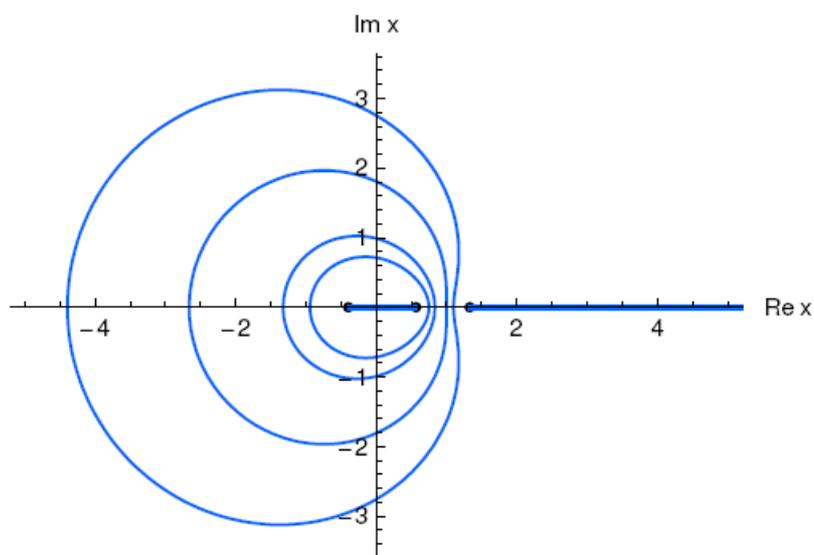


Рисунок 7. Шесть классических траекторий на комплексной  $x$  – плоскости для частицы с энергией  $E = 0.1$  в потенциальном поле  $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ . Три точки поворота расположены при  $x = -0.398, 0.567, 1.331$ . Имеются две классически разрешенные области, в одной из которых классическая частица колеблется между точками поворота при  $-0.398$  и  $0.567$ , тогда как вторая область представляет собой отрезок действительной оси справа от  $1.331$ , где классическая частица дрейфует до бесконечности за конечное время. Все другие классические траектории замкнуты и периодичны.

Далее, разрешим энергии частицы иметь также мнимую компоненту. Мы положим  $g = 2/\sqrt{125}$  и  $E = 0.456 - 0.0489i$ . Такой выбор смещает две внешние точки чуть выше оси действительных значений  $x$ , центральную точку – чуть ниже этой оси, как показано на рис. 8. Траектория слева изображает классическую частицу, которая стартует из начала координат и движется до момента  $t_{\max} = 50$ , тогда как траектория движения справа продолжается до  $t_{\max} = 200$ . Заметим, что классическая частица начинает свое движение, раскручиваясь относительно пары двух левых точек поворота, которые фиксируют края области удержания. Спустя некоторое время основное влияние начинает постепенно оказывать третья точка поворота. Мы наблюдаем эту смену влияния следующим образом: вначале, когда частица пересекает действительную ось справа от средней точки поворота, ее траектория является вогнутой, если смотреть слева, но с течением времени такая вогнутость начинает изменяться на противоположную. Видно, что для пятой орбиты влияние правой точки поворота оказывается значительным, и мы можем утверждать что классическая частица теперь “туннелировала” наружу и освободилась от пут параболического потенциала. Время, за которое происходит это классическое проникновение, примерно составляет  $t = 40$ . Это хорошо согласуется с временем жизни квантового состояния в (8), численное значение которого равно примерно 20.

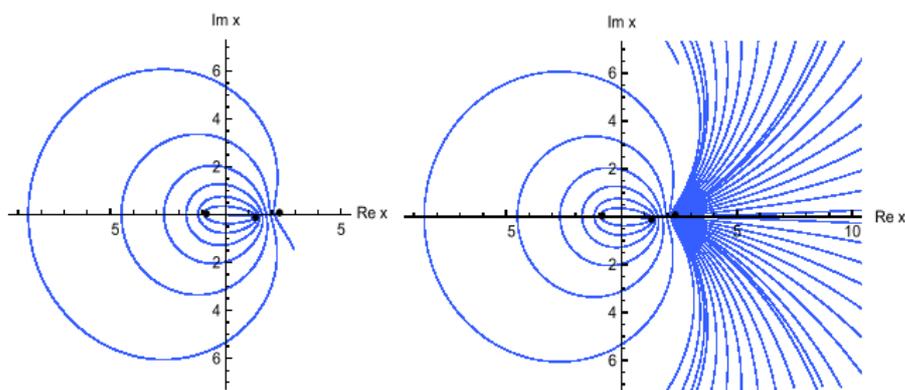


Рисунок 8. Траектория в комплексной  $x$  – плоскости классической частицы с комплексной энергией  $E = 0.456 - 0.0489i$  в потенциальном поле  $\frac{1}{2}x^2 - 2x^3/\sqrt{125}$ . Левая траектория начинается при  $x = 0$  и заканчивается при  $t_{\max} = 50$ , а правая траектория – при  $t_{\max} = 200$ . Правая точка поворота сохраняет влияние примерно до  $t = 40$ , и это хорошо согласуется с временем жизни  $\tau$  квантового состояния, численное значение которого в соответствии с (8) равно примерно  $\tau = 20$ .

## 6. Периодический потенциал

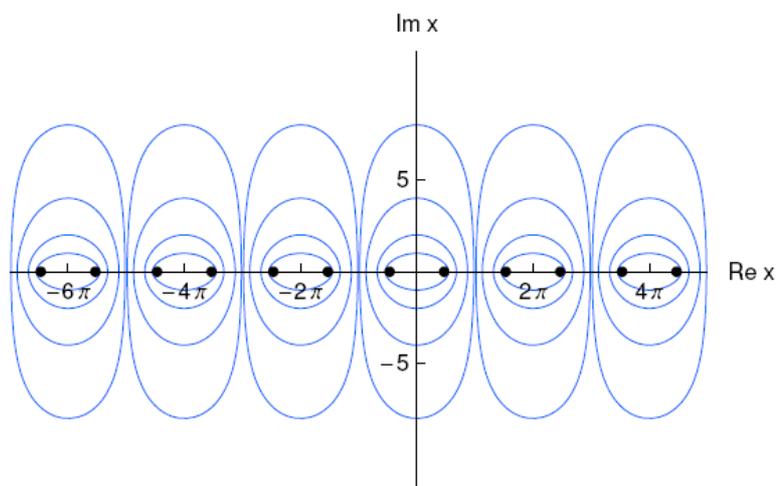


Рисунок 9. Классические траектории в комплексной  $x$  – плоскости для частицы с энергией  $E = -0.09754$  в потенциальном поле  $-\cos x$ . Движение является периодическим, частица удерживается в ячейке шириной  $2\pi$ . Для каждой ячейки изображены пять траекторий. Изображенные здесь траектории являются периодическими аналогами траекторий, представленных на рис. 4.

Периодический потенциал использован для моделирования поведения квантовой частицы в кристаллической решетке. Когда энергия такой частицы лежит ниже вершины потенциала, имеется бесконечно много изолированных классически разрешенных областей на действительной оси. Обычно квантовая частица удерживается в одной из них, но существует вероятность туннелирования в смежную классически разрешенную область. В итоге такая частица случайным образом прыгает в кристалле между такими областями. Однако в узкой полосе (или в полосах) энергии частица может свободно дрейфовать из области в область в одном направлении. В таких случаях говорят о движении делокализованной частицы в зоне проводимости.

Классическая частица в таком периодическом потенциале проявляет такие же характеристики поведения, но только в том случае, если ее энергия является комплексной. Если же ее энергия остается действительной, то эта частица демонстрирует только периодическое движение и постоянно удерживается строго в одной из ячеек решетки. Рисунок 9 иллюстрирует это периодическое движение для частицы с энергией  $E = -0.09754$  в поле с потенциалом  $-\cos x$ . Если в том же потенциальном поле сделать энергию комплексной:  $E = -0.1 - 0.15i$ , то тогда классическая частица будет совершать локализованные прыжки из ячейки в ячейку (см. рис. 10). На этом рисунке частица начинает двигаться из начальной точки  $x = 0$  и “туннелирует” вправо, вправо, влево, влево, влево, влево, влево, вправо и так далее, без самопересечений траектории. Это детерминистическое “случайное блуждание” напоминает поведение локализованной квантовой частицы, случайно перемещающейся в кристалле из ячейки в ячейку.

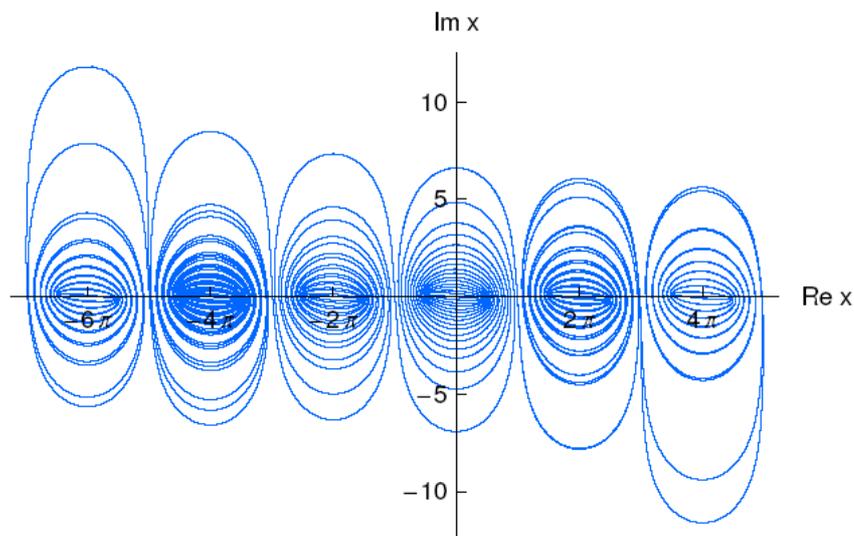


Рисунок 10. Классическая траектория в комплексной  $x$  – плоскости для частицы с энергией  $E = -0.1 - 0.15i$  в потенциальном поле  $-\cos x$ . Частица начинает движение в начальной точке  $x = 0$ , раскручивается и перепрыгивает в смежную ячейку справа. Затем она закручивается и перепрыгивает в следующую ячейку справа. Далее она пять раз прыгает, закручиваясь, налево и еще раз направо. Это детерминистическое “случайное блуждание” напоминает поведение локализованной квантовой частицы в кристалле.

Темп туннелирования классической частицы зависит от мнимой части энергии. Чтобы измерить время, необходимое частице (рис.10) для прыжка в смежную ячейку, мы просто подсчитали число поворотов на спиральном пути в каждой ячейке. Это дает чрезвычайно точную оценку времени, которое частица проводит в каждой ячейке, прежде чем она перепрыгнет в смежную ячейку. Если мы затем будем варьировать мнимую часть энергии и построим соотношение между  $\text{Im } E$  и временем туннелирования, мы получим зависимость изображенную на рис. 11. Мы видим из этого графика, что произведение  $\text{Im } E$  на время туннелирования является величиной постоянной. В системе единиц с  $\hbar = 1$  для квантового соотношения неопределенности время-энергия это произведение должно быть больше  $\frac{1}{2}$ , и эта низшая граница является предельной для гармонического осциллятора. Измеряя для потенциала  $-\cos x$ , мы установили, что численное значение данного произведения равно приблизительно 17.

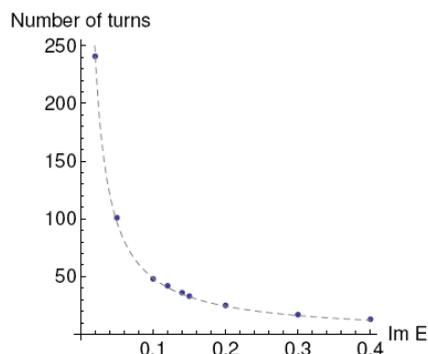


Рисунок 11. Число поворотов (Number of turns) в спиральном процессе туннелирования, показанном на рис. 10, которые требуются для классической частицы, чтобы прыгнуть с одной позиции на смежную по сравнению с мнимой частью ее энергии. Этот рисунок показывает, что произведение времени туннелирования и мнимой части энергии является константой. Согласно принципу неопределенности времени-энергии это произведение должно быть больше, чем  $\frac{1}{2}$ , и его значение равно примерно 17 для классического потенциала  $-\cos x$ .

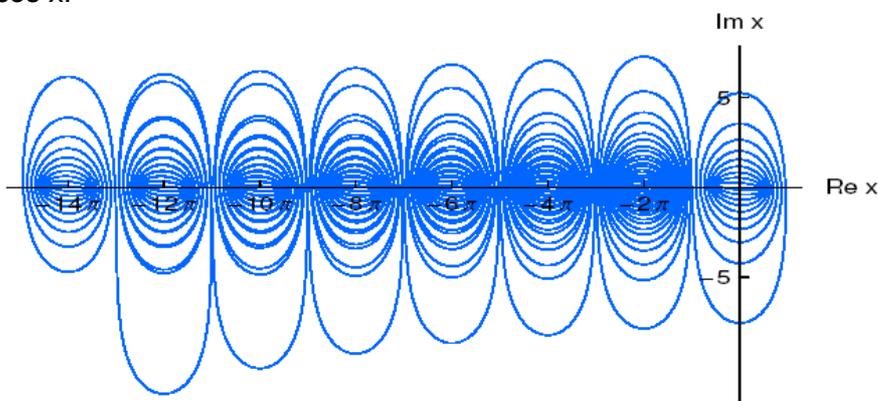


Рисунок 12. Классическая траектория в комплексной  $x$  – плоскости для частицы с энергией  $E = -0.09754 - 0.1278i$  в потенциальном поле  $-\cos x$ . Частица начинает движение в начальной точке  $x = 0$  и ведет себя как делокализованная квантовая частица в зоне проводимости. Она дрейфует влево приблизительно с постоянным темпом, около двадцати раз закручивается, а затем примерно столько же раз раскручивается, прежде чем пересечет следующую смежную ячейку.

Мы установили также, что имеется узкий диапазон для действительной части энергии, в котором классическая частица в потенциальном поле  $-\cos x$  ведет себя как делокализованная квантовая частица в зоне проводимости; то есть классическая частица последовательно дрейфует в поле от ячейки к ячейке в одном направлении. Классическая траектория, изображающая это поведение, представлена на рис. 12. Энергия этой частицы равна  $E = -0.09754 - 0.1278i$ . Края полосы могут быть определены численно с большой точностью; мы установили, что когда  $\text{Im } E = -0.1278$ , диапазон действительной части энергии в этой полосе удовлетворяет условию  $-0.1008 < \text{Re } E < -0.0971$ .

## 7. Заключение

Классические дифференциальные уравнения, которые мы в этой работе решали численно, могут быть решены точно с помощью эллиптических функций, но мы не стали этого делать, поскольку нас интересовали только качественные результаты. Найденные решения позволяют думать, что многие свойства,

считавшиеся характерными только на квантовой арене, могут быть воспроизведены в контексте комплексно-значной квантовой механики. Разумеется, мы не показали, что все квантовое поведение полностью может быть описано классически. В частности, нам еще не удалось наблюдать феномен интерференции. (Например, мы еще не видели аналога узлов собственных функций граничных состояний.)

Обсуждавшиеся здесь идеи могут рассматриваться в качестве той или иной альтернативной версии формулировки квантовой механики со скрытыми параметрами. Исходная идея де Бройля, Бома и Вижье состояла в том, что квантовая система может быть сведена к детерминистической системе, для которой вероятности возникают из-за незнания некоторых определенных скрытых параметров.

Этот подход связан с различными трудностями, но Винером и Делларичиа был предложен и альтернативный путь [13, 14], где утверждалось, что скрытая величина в представлении координатного пространства квантовой механики является не классическим положением частицы, а скорее импульсной переменной, которая интегрируется, и, таким образом, преодолевает проблемы, связанные с традиционными подходами. Чтобы получить условие квантования, Винер и Делларичиа ввели распределения вероятностей для классического фазового пространства, найдя, таким образом, спектральное разложение оператора Лиувилля по собственным функциям соответствующего уравнения Шредингера. Формулировка классической механики с использованием комплексной энергии, развитая здесь, если ее рассматривать в качестве альтернативной теории со скрытыми параметрами, близка по духу идее Винера и Делларичиа, но все же отличается от нее и более проста в том смысле, что мы не вводили распределений вероятностей в классическом фазовом пространстве. Тем не менее, недоступность мнимой составляющей энергии в классической механике может потребовать введения распределения вероятности для энергии, что может повлечь необходимость в более точной формулировке принципа неопределенности. Аналогии между квантовой механикой и классической механикой с комплексной энергией, описанные в настоящей статье, свидетельствуют в пользу дальнейших исследований.

Мы благодарим M. Berry, G. Dunne, H. F. Jones и R. Rivers за полезные дискуссии. Carl M. Bender работал в рамках гранта от Министерства энергетики США.

## Библиография

- [1] C. M. Bender and T. T. Wu, Phys. Rev. Lett. 21, 406 (1968) and Phys. Rev. 184, 1231 (1969); C. M. Bender and S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* (McGraw-Hill, New York, 1978), Chap. 7.
- [2] C. M. Bender, S. Boettcher, and P. N. Meisinger, J. Math. Phys. 40, 2201 (1999).
- [3] A. Nanayakkara, Czech. J. Phys. 54, 101 (2004) and J. Phys. A: Math. Gen. 37, 4321 (2004).
- [4] C. M. Bender, Contemp. Phys. 46, 277 (2005).
- [5] C. M. Bender, J.-H. Chen, D. W. Darg, and K. A. Milton, J. Phys. A: Math. Gen. 39, 4219 (2006).
- [6] C. M. Bender, D. D. Holm, and D. W. Hook, J. Phys. A: Math. Theor. 40, F81 (2007).
- [7] C. M. Bender, D. C. Brody, J.-H. Chen, and E. Furlan, J. Phys. A: Math. Theor. 40, F153 (2007).
- [8] A. Fring, J. Phys. A: Math. Theor. 40, 4215 (2007).
- [9] C. M. Bender and D. W. Darg, J. Math. Phys. 48, 042703 (2007).

- [10] C. M. Bender, Rep. Prog. Phys. 70, 947 (2007).
- [11] C. M. Bender, D. D. Holm, and D. W. Hook, J. Phys. A: Math. Theor. 40, F793 (2007).
- [12] C. M. Bender, R. Yaris, J. Bendler, R. Lovett, and P. A. Fedders, Phys. Rev. A 18, 1816 (1978).
- [13] N. Wiener and G. Della Riccia, in *Analysis in Function Space*, W. T. Martin and I. Segal, Eds. (Technology Press, Cambridge, Massachusetts, 1964).
- [14] G. Della Riccia and N. Wiener, J. Math. Phys. 7, 1372 (1966).